SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1996-97

Bruno Franchi

STATI FONDAMENTALI PER OPERATORI TIPO CURVATURA DI GAUSS

13 marzo 1997

Tecnoprint - Bologna 1997

Riassunto. In questo lavoro proviamo l'esistenza di uno stato fondamentale (ground state) per una equazione tipo curvatura di Gauss in tutto lo spazio, utilizzando il metodo di shooting.

Abstract. In this paper we shall prove the existence of a ground state solution in the all space for a Gaussian type curvature equation, by using a shooting method.

1. Questo seminario presenterà alcuni risultati ottenuti in collaborazione con L.A. Peletier ([FP]) sull'esistenza di *Ground States* per una classe di equazioni contenenti l'operatore di Monge-Ampère. Più precisamente, cercheremo soluzioni del problema

$$(P) \qquad \begin{cases} \frac{1}{n}\frac{\det(D^2\Phi)}{(1+|D\Phi|^2)^{s/2}} = \varepsilon(-\Phi)^n - (-\Phi)^q & \text{in } \mathbb{R}^n \\ \Phi \le 0, \qquad \lim_{x\to\infty}\Phi(x) = 0. \end{cases}$$

Qui $D\Phi$ denota il gradiente di Φ e $D^2\Phi$ la matrice Hessiana di Φ. Le costanti ε, n, q e s hanno le proprietà seguenti:

$$\varepsilon > 0, \quad q > n > 1, \quad s > n+1 \quad \text{e } n \text{ è un intero.} \tag{1.1}$$

Se $s = n+2$, l'operatore differenziale che compare a sinistra esprime la curvatura di Gauss del grafico di Φ.

Un risultato di esistenza per (P) è del tutto naturale, poichè analoghi risultati di perturbazione valgono per l'equazione della curvatura media ([PS]) in $\mathbb{R}^n$, come pure per l'operatore di Monge-Ampère in domini limitati strettamente convessi ([FKP]). Il termine $\varepsilon(-\Phi)^n$ in (P) corrisponde al termine $\varepsilon\Phi$ nel caso della curvatura media, tenuto conto della diversa omogeneità del termine in (P) che contiene le derivate seconde. Analogamente la condizione $q > n$ corrisponde a $q > 1$ in [PS]. Non è d'altra parte sorprendente che nel Teorema I non appaia alcun esponente critico, mentre la restrizione $q < (n+2)/(n-2)$ appare (necessariamente) in [PS]: infatti le equazioni di Monge-Ampère non hanno esponente critico all'infinito: si vedano [T] e [FKS].

Ground states per equazioni tipo Monge-Ampère sono stati studiati in precedenza in [F] quando $s \le n+1$, cioè non nel caso geometrico della curvatura di Gauss; tuttavia alcuni risultati qualitativi provati in [F] saranno usati nel corso del lavoro.

L'invarianza per rotazioni del problema (P) suggerisce di cercare soluzioni a simmetria sferica

$$\Phi(x) = -U(r). \tag{1.2}$$

Infatti mostreremo che tali soluzioni radiali del problema (P) esistono. Più precisamente mostreremo che

Teorema I. *Esiste una costante $\varepsilon_0 > 0$ tale che, se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, allora il problema (P) ha una soluzione $U_\varepsilon \in C^2([0,\infty))$ della forma (1.2), che gode delle proprietà seguenti:*

$$U_\varepsilon(r) > 0 \ \text{ per } r \ge 0, \quad U_\varepsilon'(0) = 0 \quad \text{e} \quad U_\varepsilon'(r) < 0 \ \text{ per } r > 0. \tag{1.3}$$

Inoltre

$$U_\varepsilon(0) = \max U_\varepsilon \approx \varepsilon^{1/(q-n)} \quad \text{per} \quad \varepsilon \to 0^+.$$

Sostituendo (1.2) nel problema (P) si ottiene il problema seguente

$$(P') \qquad \begin{cases} \dfrac{(|U'|^{n-1}U')'}{(1+|U'|^2)^{s/2}} + r^{n-1}(-\varepsilon U^n + U^q) = 0 & \text{per} \quad r > 0, \\ U \ge 0, \quad U'(0) = 0 \quad \text{e} \quad U(r) \to 0 \text{ per } r \to \infty. \end{cases}$$

Qui abbiamo utilizzato il fatto che, in analogia con [BLP], [FLS] and [F], ci aspettiamo una soluzione U_ε decrescente. Così il Teorema I è equivalente al teorema

Teorema II. *Esiste una costante $\varepsilon_0 > 0$ tale che, se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, allora il problema (P') ha una soluzione $U_\varepsilon \in C^2([0,\infty))$ che gode delle proprietà (1.3) e*

$$U_\varepsilon(0) \approx \varepsilon^{1/(q-n)} \quad \text{per} \quad \varepsilon \to 0^+.$$

Osservazione. Segue dalla regola di l'Hôpital's e dall'equazione differenziale per U_ε che $U_\varepsilon \in C^2([0,\infty))$ quando

$$U_\varepsilon \in C^1([0,\infty)), \quad (U_\varepsilon')^n \in C^1([0,\infty)) \quad \text{e} \quad U_\varepsilon'(r) < 0 \text{ per } r > 0.$$

Come in [PS], riscaleremo la variabile indipendente e la variabile dipendente con l'intento di far comparire davanti al gradiente nel denominatore del primo membro un fattore che si annulla per $\varepsilon \to 0$. Il riscalamento corretto per questo proposito è il seguente:

$$W_\varepsilon(r) = \varepsilon^b U_\varepsilon(\varepsilon^a r), \tag{1.4a}$$

dove

$$a \in \Big(-\frac{1}{n(n+1)}, 0\Big), \quad b = \frac{2an}{q-n}, \quad \sigma = 1 + 2an > 0 \tag{1.4b}$$

e

$$\mu = -(a+b) = -a\frac{q+n}{q-n} > 0. \tag{1.4c}$$

La scelta di a in (1.4b) richiede un ulteriore commento. Infatti, $a < 0$ implica $\mu > 0$, e vedremo tra poco (problema (P'')) che questo garantirà che, una volta scritto il problema (P') nelle nuove variabili, il termine contenente il gradiente si annulli per $\varepsilon \to 0$. La stima inferiore per a sarà usata alla fine della prova, fornendoci una stima a priori per la stima del gradiente di opportune soluzioni approosimate del problema (P').

Ora, in termini delle nuove variabili, il problema (P') diviene

$$(P'') \qquad \begin{cases} \dfrac{(|W'|^{n-1}W')'}{(1+\varepsilon^{2\mu}|W'|^2)^{3/2}} + r^{n-1}(-\varepsilon^\sigma W^n + W^q) = 0 & \text{per} \quad r > 0 \\ W \geq 0, \quad W'(0) = 0 \quad \text{e} \quad W(r) \to 0 \text{ per } r \to \infty. \end{cases}$$

Possiamo ora riformulare il Teorema II come segue.

Teorema III. *Esiste una costante $\varepsilon_0 > 0$ tale che, se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, allora il problema (P') ha una soluzione $W_\varepsilon \in C^2([0,\infty))$ che gode delle proprietà (1.3), e*

$$\varepsilon^{\sigma/(q-n)}\Big(\frac{q+1}{n+1}\Big)^{1/(q-n)} \leq W_\varepsilon(0) \leq \xi_1 \varepsilon^{\sigma/(q-n)},$$

dove ξ_1 è una costante positiva.

La prova del Teorema III è basata sul metodo di shooting, usato originalmente in [BLP] e poi in [FLS] e [F]. Tuttavia, come in [F], risulterà più conveniente applicare questo metodo

a un'equazione che è quasi autonoma. Questo richiede una ulteriore trasformazione. Inoltre, per ottenere stime a priori del gradiente, dobbiamo approssimare il denominatore dell'operatore differenziale in (P″) con un altro che cresce più lentamente all'infinito. In questa parte della prova, la difficoltà principale si presenta quando cerchiamo una soluzione di un problema di Cauchy associato che si annulli in un tempo finito. Per fare questo le tecniche di [FLS] e [F] non possono essere applicare un metodo di approssimazione come in [PS]. Per finire, per ottenere il ground state desiderato ci occorre un ulteriore argomento di limite, che richiede accurate stime a priori delle soluzioni del problema con denominatore modificato.

2. Cominciamo con alcune definizioni. Poniamo

$$f_\varepsilon(u) = -\varepsilon^\sigma u_+^n + u_+^q, \qquad \text{dove} \quad u_+ = \max\{u, 0\}, \tag{2.1}$$

$$F_\varepsilon(u) = \int_0^u f_\varepsilon(v)\,dv = -\frac{\varepsilon^\sigma}{n+1} u_+^{n+1} + \frac{1}{q+1} u_+^{q+1}, \tag{2.2}$$

$$\alpha_\varepsilon = \varepsilon^{\sigma/(q-n)}, \qquad \beta_\varepsilon = \left(\frac{q+1}{n+1}\right)^{1/(q-n)} \varepsilon^{\sigma/(q-n)}, \tag{2.3}$$

così che

$$f_\varepsilon(u) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < u < \alpha_\varepsilon \quad \text{e} \quad f_\varepsilon(u) > 0 \quad \text{per} \quad u > \alpha_\varepsilon,$$
$$F_\varepsilon(u) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < u < \beta_\varepsilon \quad \text{e} \quad F_\varepsilon(u) > 0 \quad \text{per} \quad u > \beta_\varepsilon.$$

Inoltre introduciamo le abbreviazioni

$$m = \frac{n-1}{2n}, \qquad \nu = \frac{q+n}{2n(q-n)}, \qquad d_n = \frac{2n}{n+1}, \qquad c_n = \frac{1}{d_n^{n+1}}. \tag{2.4}$$

Per $\theta \geq 0$ definiamo la funzione

$$\Omega_\theta(p) = (p^2 + \theta^2)^{(n-1)/2} p \qquad \text{per} \quad p \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

così che, per ogni $p \in \mathbb{R}$,

$$\Omega_\theta(p) \to |p|^{n-1} p \quad \text{per} \quad \theta \to 0.$$

Come accennato nell'Introduzione, proveremo l'esistenza di una soluzione di (P″) con il metodo di shooting, e il passo cruciale consiste nel provare che esiste una soluzione dell'equazione in (P″) che si annulla per un valore finito de r. Come in in [PS], proveremo l'esistenza di questa soluzione per $\varepsilon > 0$ piccolo dall'esistenza di una soluzione simile per $\varepsilon = 0$, quando l'equazione prende una forma più semplice. Infatti, ponendo formalmente $\varepsilon = 0$ in (P″), l'equazione in (P″) diventa una equazione di Monge-Ampère

$$(|W'|^{n-1} W')' + r^{n-1} W^q = 0$$

che è già stata completamente studiata su $[0,1]$ in [K].

Tuttavia, nel nostro caso, risulta più conveniente trattare separatamente con ε vicino a zero in f_ε e ε vicino a zero in $(1+\varepsilon^{2\mu}|W'|^2)^{s/2}$. A tal fine, riscaliamo ancora la variabile indipendente e la variabile indipendente ponendo

$$W(r) = \varepsilon^{\sigma/(q-n)} V(\varepsilon^{\sigma/2n} r),$$

così che l'equazione in (P'') prende la forma

$$\frac{(|V'|^{n-1}V')'}{(1+\varepsilon^{2\nu}|V'|^2)^{s/2}} + r^{n-1} f_1(V) = 0,$$

dove ν è dato in (2.4).

Procediamo ora come in [F] per ridurre l'equazione in una forma quasi autonoma. A tal fine introduciamo le variabili

$$t = r^{2n/(n+1)}, \qquad v(t) = V(r). \tag{2.6}$$

Questo porta all'equazione

$$\frac{(|v'|^{n-1}v')'}{g(\varepsilon^{2\nu}t^{2m}|v'|^2)} + \frac{n-1}{2t}\frac{|v'|^{n-1}v'}{g(\varepsilon^{2\nu}t^{2m}|v'|^2)} + c_n f_1(v) = 0 \qquad \text{per} \quad t>0, \tag{2.7}$$

dove

$$g(p) = (1+d_n^2 p)^{s/2}. \tag{2.8}$$

Nel seguito tratteremo principalmente con l'equazione (2.7). Inoltre, per ottenere una stima del gradiente, è conveniente approssimare la funzione g con una successione di funzioni $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definite da

$$g_k(p) = \frac{k+1}{k}\left\{(1+d_n^2 p)^{-s/2} + \frac{1}{k}(1+d_n^2 p)^{-(n+1)/2}\right\}^{-1}.$$

Notiamo che, siccome $s > n+1$, per ogni $k>0$,

$$g_k(p) \approx p^{(n+1)/2} \quad \text{mentre} \quad g(p) \approx p^{s/2} \quad \text{per} \quad p \to \infty.$$

Inoltre, se $p>0$, allora $0 \le p g_k'(p) \le s g_k(p)$.

Il punto di partenza della prova è un opportuno problema limite

$$\begin{cases} (|v'|^{n-1}v')' + \frac{n-1}{2t}|v'|^{n-1}v' + c_n f_1(v) = 0 \\ v(0)>0, \qquad v'(0)=0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Proposizione 2.1. *Esiste una soluzione $v_1(t)$ del problema (2.9) tale che*

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{t > 0 : v_1 > 0 \text{ in } [0,t)\} < \infty.$$

Inoltre

$$v_1(0) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1 > \beta_1 \quad e \quad v_1' < 0 \quad su \quad (0,R],$$

così che v_1 può essere prolungata su $[0, R+\delta]$.

Dimostrazione. Per [K] esiste una funzione regolare concava $U = U(r)$, definita su $[0,1]$, che risolve il problema

$$\begin{cases} (|U'|^{n-1}U')' + r^{n-1}(U_+)^q = 0, & 0 \le r \le 1, \\ U'(0) = 0, \quad U(1) = 0, \quad U'(r) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < r \le 1. \end{cases}$$

Ovviamente, U può essere prolungata come soluzione di questo problema su un intervallo $[0, 1+\delta]$ per qualche $\delta > 0$. Scriviamo $U(0) = c$. Sia U_λ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (|U'|^{n-1}U')' + r^{n-1}\{-\lambda(U_+)^n + (U_+)^q\} = 0, & r > 0, \\ U(0) = c \quad \text{e} \quad U'(0) = 0. \end{cases}$$

L'esistenza e l'unicità locali della soluzione seguono da [FLS], Proposizione A.1. Per la dipendenza continua dai parametri, esiste $\lambda_0 > 0$ tale che, se $0 < \lambda < \lambda_0$, la soluzione U_λ esiste su $[0, 1+\delta]$, e ha un primo zero $r_\lambda \in (0, 1+\delta)$. Inoltre, $U_\lambda' < 0$ on $(0, r_\lambda]$. Effettuando ora il cambiamento di variabili (2.6) la prova è completa.

Un argomento di continuità ci permette ora di provare il risultato seguente.

Proposizione 2.2. *Esistono delle costanti $\theta_1 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ tali che, se $k \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0, \theta_1)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, allora la soluzione $\tilde{v} = \tilde{v}(\varepsilon, \theta, k)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} (\Omega_\theta(\tilde{v}'))' + \frac{n-1}{2t}\Omega_\theta(\tilde{v}') + c_n f_1(\tilde{v}) g_k(\varepsilon^{2\nu} t^{2m} |\Omega_\theta(\tilde{v}')|^{2/n}) = 0 \\ \tilde{v}(0) = \xi_1, \qquad \tilde{v}'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

esiste su $[0, \infty)$ e si annulla in un tempo finito.

Proof. La prova va divisa in 3 passi. *Passo 1: Esistenza locale.* Il problema (2.10) ha una soluzione locale vicino a $t \doteq 0$. Infatti poendo $w = -t^{(n-1)/2}\Omega_\theta(\tilde{v}')$, otteniamo

$$w' = c_n f_1(\tilde{v}) g_k(\varepsilon^{2\nu} |w|^{2/n}) t^{(n-1)/2}.$$

Notiamo che $f_1(\tilde{v}) > 0$ vicino a zero, poichè $f_1(\tilde{v}(0)) = f_1(\xi_1) > 0$, per la Proposizione 2.1.

Poniamo ora

$$G_\epsilon(w) = \int_0^w \frac{d\rho}{g_k(\varepsilon^{2\nu}\rho^{2/n})};$$

abbiamo

$$G_\varepsilon(w(t)) = c_n \int_0^t s^{(n-1)/2} f_1(\tilde{v}(s)\, ds. \tag{2.11}$$

Così l'esistenza di una soluzione locale del problema di Cauchy segue applicando un risultato di punto fisso.

Passo 2: Prolungabilità in $[0,\infty)$. Denotiamo con $[0,t^*)$ l'intervallo massimale di prolungabilità di $\tilde{v}$; proveremo che $t^* = +\infty$. A tal fine, supponiamo per assurdo che $t^* < \infty$. L'identità fondamentale (4) di [F] asserisce che

$$H_{\varepsilon,\theta,k}(t,|\tilde{v}'(t)|) + (n-1)\int_0^t D_{\varepsilon,\theta,k}(\rho,|\tilde{v}'(\rho)|)\,\frac{d\rho}{\rho} = c_n F_1(\xi_1) - c_n F_1(\tilde{v}(t)) \tag{2.12}$$

per $0 < t < t^*$, dove

$$H_{\varepsilon,\theta,k}(t,p) = \int_0^p \frac{z\Omega'_\theta(z)\,dz}{g_k(\varepsilon^{2\nu}t^{2m}|\Omega_\theta(z)|^{2/n})}$$

e

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon,\theta,k}(\rho,p) = {} & \frac{1}{2}\frac{\Omega_\theta(p)\,p}{g_k(\varepsilon^{2\nu}\rho^{2m}|\Omega_\theta(p)|^{2/n})} \\ & + \frac{1}{n}\int_0^p \xi\,\frac{g_k'(\varepsilon^{2\nu}\rho^{2m}|\Omega_\theta(\xi)|^{2/n})\,\varepsilon^{2\nu}\rho^{2m}\,|\Omega_\theta(\xi)|^{2/n}\,d\Omega_\theta(\xi)}{g_k(\varepsilon^{2\nu}\rho^{2m}|\Omega_\theta(\xi)|^{2/n})^2} \end{aligned}$$

è una funzione nonnegativa (si veda [F], Lemma 1). Per [F], Lemma 2, $\tilde{v}(t) \le \xi_1$, così che

$$c_n F_1(\xi_1) - c_n F_1(\tilde{v}(t)) \le M,$$

e quindi

$$H_{\varepsilon,\theta,k}(t,|\tilde{v}'(t)|) \le M \quad \text{per } t \in (0,t^*). \tag{2.13}$$

Possiamo provare ora che, se $\theta < \theta_0$, allora esistono delle costanti ε_0, p_0 (independenti da k) tali che, se $t < t^*$ e $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, risulta

$$H_{\varepsilon,\theta,k}(t,p_0) > M. \tag{2.14}$$

A tal fine notiamo che per ogni $z \ge 0$, $\Omega'_\theta(z) \ge z^{n-1}$, e che per ogni $z \ge \theta$ abbiamo $\Omega_\theta(z) \le 2^{(n-1)/2} z^n$, così che, tenendo presente la definizione di $H_{\varepsilon,\theta,k}$, otteniamo

$$\begin{aligned} H_{\varepsilon,\theta,k}(t,p_0) &\ge \int_{\theta_0}^{p_0} \frac{z^n\,dz}{g_k(\varepsilon_0^{2\nu}(t^*)^{2m}2^{(n-1)/n}z^2)} \\ &\ge \int_{\theta_0}^{p_0} \frac{z^n\,dz}{(1+d_n^2\varepsilon_0^{2\nu}(t^*)^{2m}2^{(n-1)/n}z^2)^{s/2}}, \end{aligned}$$

poichè , se $t > 0$, allora

$$(1+t)^{-(n+1)/2} \geq (1+t)^{-s/2}.$$

Schegliamo ora $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$\int_{\theta_0}^{\infty} \frac{z^n\, dz}{(1 + d_n^2 \varepsilon_0^{2\nu} (t^*)^{2m} 2^{(n-1)/n} z^2)^{s/2}} > M$$

(questa scelta è possibile per il teorema di B. Levi), e quindi possiamo scegliere p_0 indipendente da $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ tali che (2.14) è verificata. Combinando allora (2.13) con (2.14), otteniamo

$$H_{\varepsilon,\theta,k}(t, |\tilde{v}'(t)|) \leq H_{\varepsilon,\theta,k}(t, p_0) \tag{2.15}$$

così che

$$|\tilde{v}'(t)| \leq p_0. \tag{2.16}$$

Quindi, $\tilde{v}$ ha limite finito per $t \to t^*-$. Usando ancora (2.12), troviamo che anche $|\tilde{v}'|$ ha limite per $t \to t^*-$, che deve essere finito, per (2.16). D'altra parte, $\tilde{v}'$ ha segno costante in un intorno sinistro di t^*, poichè nei punti dove $\tilde{v}'$ si annulla, per l'equazione possiamo supporre che $(\Omega_\theta(\tilde{v}'))'$ ha segno costante, poichè $f_1(\tilde{v})$ ha limite finito, e quindi possiamo assumere che abbia segno costante in un intorno sinistro di t^*-. questo significa che $\tilde{v}$ puòessere prolungato a destra di t^*, una contraddizione. Così abbiamo provato che $\tilde{v}$ può essere prolungato in $[0, \infty)$; in particolare $\tilde{v}$ può essere prolungato in $[0, R+\delta]$, dove R, δ sono come nella Proposizione 2.1.

Passo 3: $\tilde{v}$ si annulla in un tempo finito. Ragioniamo ancora per assurdo. Supponiamo esista una successione $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tale che $\varepsilon_i \to 0$, $\theta_i \to 0$ e

$$\tilde{v}_i(R+\delta) := \tilde{v}(\varepsilon_i, \theta_i, k_i; R+\delta) \geq 0.$$

Per (2.16) e per il teorema di Arzelà-Ascoli, possiamo supporre che $\tilde{v}_i \to \tilde{v}_0$ per $i \to \infty$ uniformemente su $[0, R+\delta]$. Otterremo una contraddizione mostrando che $\tilde{v}_0 = v_1$, dove v_1 è la soluzione di (2.9). Infatti, per (2.11), otteniamo

$$\int_0^{t^{(n-1)/2}\Omega_{\theta_i}(\tilde{v}_i'(t))} \frac{d\sigma}{g_{k_i}(\varepsilon_i^{2\nu}|\sigma|^{2/n})} = -c_n \int_0^t \rho^{(n-1)/2} f_1(\tilde{v}_i(\rho))\, d\rho \qquad \text{for } t > 0.$$

Ovviamente, il membro di destra di questa identità tende a

$$-c_n \int_0^t \rho^{(n-1)/2} f_1(\tilde{v}_0(\rho))\, d\rho$$

per $i \to \infty$. Mostriamo ora che

$$t^{(n-1)/2} |\tilde{v}_i'(t)|^{n-1} \tilde{v}_i'(t) \to -c_n \int_0^t \rho^{(n-1)/2} f_1(\tilde{v}_0(\rho))\, d\rho \tag{2.17}$$

per $i \to \infty$. Infatti

$$\begin{aligned}\left| t^{(n-1)/2} \, |\tilde{v}_i'(t)|^{n-1}\tilde{v}_i'(t) - \int_0^{t^{(n-1)/2}\Omega_{\theta_i}(\tilde{v}_i'(t))} \frac{d\sigma}{g_{k_i}(\varepsilon_i^{2\nu}|\sigma|^{2/n})} \right| \\ \leq \int_0^{t^{(n-1)/2}|\tilde{v}_i'(t)|^n} \left\{ 1 - \frac{1}{g_{k_i}(\varepsilon_i^{2\nu}|\sigma|^{2/n})} \right\} d\sigma \\ + \int_{t^{(n-1)/2}|\tilde{v}_i'(t)|^n}^{t^{(n-1)/2}\Omega_{\theta_i}(|\tilde{v}_i(t)|)} \frac{d\sigma}{g_{k_i}(\varepsilon_i^{2\nu}|\sigma|^{2/n})} \\ = I_i' + I_i''.\end{aligned}$$

Poichè $g_{k_i}(p) \geq 1$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ e $p \geq 0$, tenendo presente (2.16), abbiamo

$$\begin{aligned} I_i'' &\leq t^{(n-1)/2} \left\{ \Omega_{\theta_i}(|\tilde{v}_i(t)|) - |\tilde{v}_i'(t)|^n \right\} \\ &\leq c t^{(n-1)/2} \theta_i^2 \to 0 \end{aligned}$$

per $i \to \infty$. D'altra parte,

$$\frac{1}{(1 + d_n^2 \varepsilon_i^{2\nu}|\sigma|^{2/n})^{s/2}} \leq \frac{1}{g_{k_i}(\varepsilon_i^{2\nu}|\sigma|^{2/n})^{s/2}} \leq 1,$$

e quindi l'integrando in I_i' tende a zero per $i \to \infty$, poichè $\nu > 0$, e quindi possiamo concludere che $I_i' \to 0$ per $i \to \infty$, per il teorema della convergenza dominata.

Così, per (2.17) possiamo concludere che $\tilde{v}_i'(t)$ converge per $i \to \infty$ per ogni $t \geq 0$ e quindi, per la stima a priori (2.16) e ancora il teorema della convergenza dominata,

$$\tilde{v}_i'(t) \to \tilde{v}_0'(t) \qquad \text{per q.o. } t \in [0, R+\delta],$$

così che, ancora per (2.17),

$$t^{(n-1)/2}|\tilde{v}_0'(t)|^{n-1}\tilde{v}_0(t)' = -c_n \int_0^t \rho^{(n-1)/2} f_1(\tilde{v}_0(\rho))\, d\rho, \tag{2.18}$$

che implica che $\tilde{v}_0$ risolve l'equazione in (2.8). Ma i dati di Cauchy di $\tilde{v}_0$ a $t = 0$ coincidono con quelli di v_1 (la soluzione di (2.8) definita nella Proposizione 2.1), e possiamo quindi applicare la Proposizione A.4 di [FLS] che afferma che la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione in (2.8) è unica fintantochè rimane positiva. Così, $\tilde{v}_0 \equiv v_1$ su $[0, R]$. D'altra parte, $v_1'(R) < 0$, per la Proposizione 2.1, e quindi possiamo applicare gli usuali risultati di unicità e concludere che $\tilde{v}_0 \equiv v_1$ su $[0, R+\delta]$. Quindi

$$\tilde{v}_0(R+\delta) = \lim_{i\to\infty} \tilde{v}_i(R+\delta) \geq 0 > v_1(R+\delta),$$

che è assurdo. Questo completa la prova della Proposizione 2.2.

Con piccole modificazioni, la prima parte della prova mostra che anche il seguente risultato è vero.

Proposizione 2.3. *Esistono delle costanti $\theta_1 > 0$, $\varepsilon > 0$ tali che, se $k \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0, \theta_1)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, allora il problema di Cauchy*

$$\text{(2.19)} \qquad \begin{cases} (\Omega_\theta(v'))' + \frac{n-1}{2t}\Omega_\theta(v') + c_n f_1(v) g_k(\varepsilon^{2\nu} t^{2m} |\Omega_\theta(v')|^{2/n}) \\ v(0) = \xi > 0, \qquad v'(0) = 0 \end{cases}$$

ha una soluzione unica $v = v(\xi, \cdot) = v(\varepsilon, \theta, k, \xi; \cdot)$ vicino a $t = 0$ che può essere prolungata su $[0, \infty)$. Inoltre, v e v' dipendono con continuità da ξ sui sottoinsiemi compatti di $[0, \infty)$.

Proposizione 2.4. *Esistono delle costanti $\varepsilon_1 > 0$, $\theta_1 > 0$ tali che, se $k \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0, \theta_1)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, il problema*

$$\text{(2.20)} \qquad \begin{cases} (\Omega_\theta(v'))' + \dfrac{n-1}{2t}\Omega_\theta(v') + c_n f_1(v) g_k(\varepsilon^{2\nu} t^{2m} |\Omega_\theta(v')|^{2/n}) = 0, \ \text{per } t > 0 \\ v \geq 0 \ \text{per } 0 < t < \infty, \\ v'(0) = 0 \ \text{e} \ v(t) \to 0 \ \text{per } t \to \infty \end{cases}$$

ha una soluzione $v = v(\varepsilon, \theta, k)$, con

$$\left(\frac{q+1}{n+1}\right)^{1/(q-n)} < v(0) < \xi_1,$$

ξ_1 essendo definito nella Proposizione 2.1.

Dimostrazione. Scegliamo $\xi \geq \beta_1$ e denotiamo con $v = v(\xi, \cdot)$ la soluzione del problema di Cauchy (2.19). Notiamo che, per (2.11), $v' < 0$ vicino a zero. Si possono presentare tre eventualità :

(i) $v > 0$, $v' < 0$ in $[0, \infty)$;

(ii) esiste un tempo $T_\xi > 0$ tale che $v' < 0$ in $(0, T_\xi)$ and $v(T_\xi) = 0$. In questo caso, per l'unicità del problema di Cauchy, $v'(T_\xi) < 0$;

(iii) come (ii) esiste un tempo $T_\xi > 0$ tale che $v'(T_\xi) = 0, v' < 0$ in $(0, T_\xi)$ e $v(T_\xi) > 0$. In questo caso $v(T_\xi) \neq \alpha_1$ per l'unicità . Ma $(\Omega_\varepsilon(v'))'(T_\xi) = -c_n f_1(v(T_\xi))$, e quindi $f(v(T_\xi)) \leq 0$, poichè $v' < 0$ primā di T_ξ. Quindi $f(v(T_\xi)) < 0$ e dunque T_ξ è un punto di minimo. Allōra, per il Lemma 1 di [F], $v(t) \geq v(T_\xi)$ per $t \geq 0$.

Ragioniamo come in [BLP], [FLS] e [F]. Poniamo

$$I_+ = \{\xi \in [\beta_1, \xi_1]; \inf v > 0\}$$
$$I_- = \{\xi \in [\beta_1, \xi_1]; v(R) = 0 \text{ per qualche } R > 0\}.$$

Basterà provare che I_+ e I_- sono sottiensiemi relativamente aperti di $[\beta_1, \xi_1]$. Per la connessione esisterà un punto $\xi \in [\beta_1, \xi_1]$ tale che $\xi \notin I_+ \cup I_-$. Quindi (ii) e (iii) non potranno verificarsi e quindi v dovrà soddisfare (i). D'altra parte, $v(\infty) = \inf\{v(t), t \geq 0\}$ non potrà essere un numero positivo (poichè $\xi \notin I_+$) e quindi v risolverà (2.20).

Ragionando come in [F], Teoremi 7 e 8, prendendo il limite per $\theta \to 0+$, otteniamo il seguente risultato

Proposizione 2.5. *Esiste una costante $\varepsilon_1 > 0$ tale che, se $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, il problema*

$$\begin{cases} (|v'|^{n-1}v')' + \dfrac{n-1}{2t}|v'|^{n-1}v' + c_n f_1(v) g_k(\varepsilon^{2\nu} t^{2m} |v'|^2) = 0. \ \text{per } t > 0 \\ v \geq 0; \qquad v'(0) = 0, \qquad v(t) \to 0 \ \text{se } t \to \infty \end{cases} \tag{2.21}$$

ha una soluzione due volte differenziabile $v = v(\varepsilon, k)$. con $v'(t) < 0$ per $t > 0$ e

$$\left(\frac{q+1}{n+1}\right)^{1/(q-n)} < v(0) < \xi_1,$$

ξ_1 essendo definito nella Proposizione 2.1.

Cambiando all'indietro le variabili

$$t = r^{2n/(n+1)} \qquad v(t) = V(r),$$

otteniamo il risultato seguente.

Proposizione 2.6. *Esiste una costante $\varepsilon_1 > 0$ tale che, se $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, il problema*

$$\begin{cases} (|V'|^{n-1}V')' = -r^{n-1} f_1(V) g_k(d_n^{-2} \varepsilon^{2\nu} |V'|^2), \ \text{per } r > 0 \\ V \geq 0, \qquad V'(0), \qquad V(r) \to 0 \ \text{se } r \to \infty \end{cases} \tag{2.22}$$

ha una soluzione due volte differenziabile $V = V(\varepsilon, k)$, con $V'(r) < 0$ per $r > 0$ e

$$\left(\frac{q+1}{n+1}\right)^{1/(q-n)} < V(0) < \xi_1,$$

ξ_1 essendo definito nella Proposizione 2.1.

Poniamo ora

$$W = W(\varepsilon, k) = \varepsilon^{\sigma/(q-n)} V(\varepsilon, k, \varepsilon^{\sigma/2n} r).$$

Allora dalla Proposizione 2.6 segue che:

Proposizione 2.7. *Esiste una costante $\varepsilon_1 > 0$ tale che, se $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, il problema*

$$\begin{cases} (|W'|^{n-1}W')' = -r^{n-1} f_\varepsilon(W) g_k(d_n^{-2} \varepsilon^{2\mu} |W'|^2) \ \text{per } r > 0, \\ W \geq 0, \qquad W'(0), \qquad W(r) \to 0 \ \text{se } r \to \infty \end{cases} \tag{2.23}$$

ha una soluzione due volte differenziabile $W = W(\varepsilon, k)$, con $W'(r) < 0$ for $r > 0$ e

$$\beta_\varepsilon = \left(\frac{q+1}{n+1}\right)^{1/(q-n)} \varepsilon^{\sigma/(q-n)} < W(0) < \varepsilon^{\sigma/(q-n)} \xi_1,$$

ξ_1 essendo definito nella Proposizione 2.1.

3.

L'ingrediente fondamentale nella prova dei Teoremi II e III sarà la seguente stima del gradiente.

Proposizione 3.1. *Esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, se $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, allora la soluzione $W = W(\varepsilon, k)$ del problema (2.23) soddisfa*

$$|W'(r)| \leq 1 \text{ per } r \geq 0.$$

Proof. Per semplicità, nel seguito scriveremo W invece di $W(\varepsilon, k)$ in assenza di ambiguità. Poichè $W'(r) < 0$ per $r > 0$ e $W(0) > \beta_\varepsilon > \alpha_\varepsilon$, esiste un (unico) punto $r_{\varepsilon,k} > 0$ tale che $W(r_{\varepsilon,k}) = \alpha_\varepsilon$, e quindi, per l'equazione in (2.23), $W'' < 0$ in $(0, r_{\varepsilon,k})$ e $W'' > 0$ in $(r_{\varepsilon,k}, \infty)$. In particolare

$$|W'(r_{\varepsilon,k})| = \max\{|W'(r)|;\, 0 \leq r < \infty\}.$$

Poniamo ora $\alpha_\varepsilon^* = h\varepsilon^{\sigma/(q-n)}$ per un h fissato tale che

$$h \in \left(1, \left(\frac{q+1}{n+1}\right)^{1/(q-n)}\right).$$

Allora $\alpha_\varepsilon^* \in (\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon)$. Siccome W è strettamente decrescente e $W(0) > \beta_\varepsilon$, possiamo definire $r_{\varepsilon,k}^*$ dall'identità$\alpha_\varepsilon^* = W(r_{\varepsilon,k}^*)$. Ovviamente $r_{\varepsilon,k}^* < r_{\varepsilon,k}$.

Integrando l'equazione in (2.23), otteniamo

$$\begin{aligned} G(|W'(r_{\varepsilon,k}^*)|^n) &= \int_0^{|W'(r_{\varepsilon,k}^*)|^n} \frac{d\xi}{g_k(d_n^{-2}\varepsilon^{2\mu}\xi^{2/n})} \\ &= \int_0^{r_{\varepsilon,k}^*} s^{n-1} f_\varepsilon(W(s))\, ds \geq f_\varepsilon(\alpha_\varepsilon^*)\frac{(r_{\varepsilon,k}^*)^n}{n}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

poichè f_ε è decrescente dopo α_ε e $W(r) \geq \alpha_\varepsilon^*$ per $r \leq r_{\varepsilon,k}^*$. Inoltre, poichè $W(0) > \beta_\varepsilon$ abbiamo

$$\beta_\varepsilon - \alpha_\varepsilon^* \leq W(0) - \alpha_\varepsilon^* = \int_0^{r_{\varepsilon,k}^*} -W'(s)\, ds \leq r_{\varepsilon,k}^* |W'(r_{\varepsilon,k}^*)|, \tag{3.2}$$

poichè $-W'$ è crescente in $(0, r_{\varepsilon,k}^*)$. Siccome $G(p) \leq p$, possiamo combinare (3.1) e (3.2) per ottenere una stima da sotto per $|W'|$:

$$|W'(r_{\varepsilon,k}^*)|^{2n} \geq f_\varepsilon(\alpha_\varepsilon^*)\frac{(r_{\varepsilon,k}^*)^n}{n}\frac{(\beta_\varepsilon - \alpha_\varepsilon^*)^n}{(r_{\varepsilon,k}^*)^n} = f_\varepsilon(\alpha_\varepsilon^*)\frac{(\beta_\varepsilon - \alpha_\varepsilon^*)^n}{n}. \tag{3.3}$$

Deriviamo ora la nostra stima per $r_{\varepsilon,k} - r_{\varepsilon,k}^*$. Da (3.3) deduciamo che

$$\begin{aligned} \alpha_\varepsilon^* - \alpha_\varepsilon &= \int_{r_{\varepsilon,k}^*}^{r_{\varepsilon,k}} -W'(s)\, ds \geq (r_{\varepsilon,k} - r_{\varepsilon,k}^*)|W'(r_{\varepsilon,k}^*)| \\ &\geq \left(\frac{f_\varepsilon(\alpha_\varepsilon^*)}{n}\right)^{1/2n} (\beta_\varepsilon - \alpha_\varepsilon^*)^{1/2}(r_{\varepsilon,k} - r_{\varepsilon,k}^*). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ancora per (3.1) abbiamo:

$$(r^*_{\varepsilon,k})^n \le \frac{n}{f_\varepsilon(\alpha^*_\varepsilon)} \int_0^\infty \frac{d\xi}{g_k(d_n^{-2}\varepsilon^{2\mu}\xi^{2/n})}$$

(notiamo che $g_k(p) \approx p^{(n+1)/2}$ per $p \to \infty$ e quindi $g_k(d_n^{-2}\varepsilon^{2\mu}\xi^{2/n}) \approx \xi^{(n+1)/n}$, così che l'integrale converge). D'altra parte per ogni $p \ge 0$ la successione

$$\left(\frac{k}{k+1} g_k(p)\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

è crescente e quindi

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{d\xi}{g_k(d_n^{-2}\varepsilon^{2\mu}\xi^{2/n})} &= \varepsilon^{-\mu n} \int_0^\infty \frac{d\eta}{g_k(d_n^{-2}\eta^{2/n})} \\ &\to \varepsilon^{-\mu n} \int_0^\infty \frac{d\eta}{(1+\eta^{2/n})^{s/2}} = \varepsilon^{-\mu n}\ell < \infty\end{aligned}$$

per $k \to \infty$, dove ℓ è una costante positiva. Così, senza ledere la generalità, possiamo assumere che, per k grande e per $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{g_k(d_n^{-2}\varepsilon^{2\mu}\xi^{2/n})} \le 2\varepsilon^{-\mu n}\ell,$$

da cui

$$\begin{aligned} r^*_{\varepsilon,k} &\le \varepsilon^{-\mu}\left(\frac{2n\ell}{f_\varepsilon(\alpha^*_\varepsilon)}\right)^{1/n} = \varepsilon^{-\mu-\sigma q/n(q-n)}\left(\frac{2n\ell}{-h^n+h^q}\right)^{1/n} \\ &= \varepsilon^{-a-1/n-1/(q-n)}\left(\frac{2n\ell}{-h^n+h^q}\right)^{1/n} = \varepsilon^{-a-1/n-1/(q-n)} c_1(h), \end{aligned} \tag{3.5}$$

poichè , per (1.4c),

$$\begin{aligned} -\mu - \frac{\sigma q}{n(q-n)} &= a\frac{q+n}{q-n} - \frac{\sigma q}{n(q-n)} = \frac{aqn + an^2 - 2aqn - q}{n(q-n)} \\ &= -\frac{an(q-n)+q}{n(q-n)} = -a - \frac{1}{n} - \frac{1}{q-n}. \end{aligned}$$

D'altra parte, per (3.4),

$$\begin{aligned} r_{\varepsilon,k} &\le r^*_{\varepsilon,k} + n^{1/2n}\frac{\alpha^*_\varepsilon - \alpha_\varepsilon}{(\beta_\varepsilon - \alpha^*_\varepsilon)^{1/2}(f_\varepsilon(\alpha^*_\varepsilon))^{1/2n}} \\ &= r^*_{\varepsilon,k} + n^{1/2n}\frac{(h-1)\varepsilon^{\sigma/(q-n)}}{\varepsilon^{\sigma/2(q-n)+\sigma q/2n(q-n)}\left((\frac{q+1}{n+1})^{1/(q-n)} - h\right)^{1/2}(-h^n+h^q)^{1/2n}} \\ &= r^*_{\varepsilon,k} + c_2(h)\varepsilon^{-a-1/2n}, \end{aligned}$$

poichè

$$\frac{\sigma}{q-n} - \frac{\sigma}{2(q-n)} - \frac{\sigma q}{2n(q-n)} = \sigma \frac{n-q}{2n(q-n)} = -\frac{\sigma}{2n} = -a - \frac{1}{2n}.$$

Con la stima da sopra (3.5) per $r^*_{\varepsilon,k}$, possiamo concludere, assumendo $\varepsilon < 1$, che

$$r_{\varepsilon,k} \le \varepsilon^{-a-1/n-1/(q-n)} \left(c_1(h) + \varepsilon^{(q+n)/2n(q-n)} c_2(h) \right) \le c_3(h) \varepsilon^{-a-1/n-1/(q-n)}. \tag{3.6}$$

Moltiplichiamo ora l'equazione in (2.23) per W' e integriamo in $[0, r_{\varepsilon,k}]$. Otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} \int_0^{|W'(r_{\varepsilon,k})|^{n+1}} & \frac{d\xi}{g_k(d_n^{-2} \varepsilon^{2\mu} \xi^{2/(n+1)})} \\ &= -\int_0^{r_{\varepsilon,k}} t^{n-1} f_\varepsilon(W(t)) W'(t)\, dt \\ &\le (r_{\varepsilon,k})^{n-1} \int_0^{r_{\varepsilon,k}} -F_\varepsilon(W(t))'\, dt, \end{aligned}$$

poichè $W'(t) \le 0$ e $W(t) \ge \alpha_\varepsilon$ in $[0, r_{\varepsilon,k}]$, così che $-f_\varepsilon(W(t))W'(t) \ge 0$ in $[0, r_{\varepsilon,k}]$. Se allora per assurdo fosse $|W'(r_{\varepsilon,k})| > 1$, avremmo

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} \int_0^1 \frac{d\xi}{(1+\varepsilon^{2\mu}\xi^{2/(n+1)})^{s/2}} &\le (r^*_{\varepsilon,k})^{n-1} \{F_\varepsilon(W(0)) - F_\varepsilon(\alpha_\varepsilon)\} \\ &= (r_{\varepsilon,k})^{n-1} \{|F_\varepsilon(\alpha_\varepsilon)| + F_\varepsilon(W(0))\} \\ &\le (r_{\varepsilon,k})^{n-1} \{|F_\varepsilon(\alpha_\varepsilon)| + F_\varepsilon(\varepsilon^{\sigma/(q-n)}\xi_1)\} \le c_1 (r_{\varepsilon,k})^{n-1} \varepsilon^{\sigma(q+1)/(q-n)}. \end{aligned}$$

Quindi

$$r_{\varepsilon,k} \ge c_2 \varepsilon^{-\sigma(q+1)/(q-n)(n-1)}.$$

Combinando questa disuguaglianza con (3.6), otteniamo

$$\varepsilon^{-\sigma(q+1)/(q-n)(n-1)+a+1/n+1/(q-n)} \le c_3. \tag{3.7}$$

Ricordiamo ora che $a > -\dfrac{1}{n(n+1)}$, e quindi

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma(q+1)}{(q-n)(n-1)} + a + \frac{1}{n} + \frac{1}{q-n} &= -\frac{2an(q+1)}{(q-n)(n-1)} - \frac{(q+1)}{(q-n)(n-1)} + a + \frac{q}{n(q-n)} \\ &= -a\left\{ \frac{2nq+2n}{(q-n)(n-1)} - 1 \right\} + \frac{-nq-n+nq-q}{n(n-1)(q-n)} \\ &= -a\frac{nq+2n+q+n^2-n}{(q-n)(n-1)} - \frac{q+n}{n(n-1)(q-n)} \\ &= -a\frac{(n+1)(n+q)}{(q-n)(n-1)} - \frac{q+n}{n(n-1)(q-n)} < 0. \end{aligned}$$

Quindi l'esponente in (3.7) è negativo e quindi (3.7) è impossibile per $\varepsilon < \varepsilon_0$, ε_0 piccolo.
Dunque l'asserto è completamente provato.

A questo punto il Teorema III segue con argomentazioni relativamente elementari dal teorema di Arzelà-Ascoli. Infine, per provare il Teorema II è sufficiente riscalare il ground state W_ε come in (1.4a).

BIBLIOGRAFIA

[BLP] H. Berestycki, P.L. Lions and L.A. Peletier, *An O.D.E. approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in* $\mathbf{R}^n$, Indiana Univ.Math.J. **30** (1981), 141–157..

[F] B. Franchi, *Global Solutions for a Class of Monge-Ampère Equations*, Nonlinear Diffusion Equations and their Equilibrium States II – Gregynog 1989, Birkhäuser, 1992.

[FKP] B. Franchi, N. Kutev, S. Polidoro, *Nontrivial Solutions for Monge-Ampère Type Operators in Convex Domains*, Manuscripta Math. **79** (1993), 13–26.

[FLS] B. Franchi, E. Lanconelli and J. Serrin, *Existence and uniqueness of Nonnegative Solutions of Qualinear Elliptic Equations in* $\mathbf{R}^n$, Advances in Math. **118** (1996), 177–243.

[FP] B. Franchi e L.A. Peletier, *Ground states for Gaussian curvature type equations*, preprint 1997.

[K] N.D. Kutev, *Nontrivial solutions for the equations of Monge-Ampère type*, J. Math. Anal. Appl. **132** (1988), 424–433.

[PS] L.A. Peletier and J. Serrin, *Ground states for the prescribed mean curvature equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 694–700.

[T] K. Tso, *Remarks on the critical exponents for Hessian operators*, Ann. Inst. Henri Poincaré - Analyse non linéaire **7** (1990), 113–122.